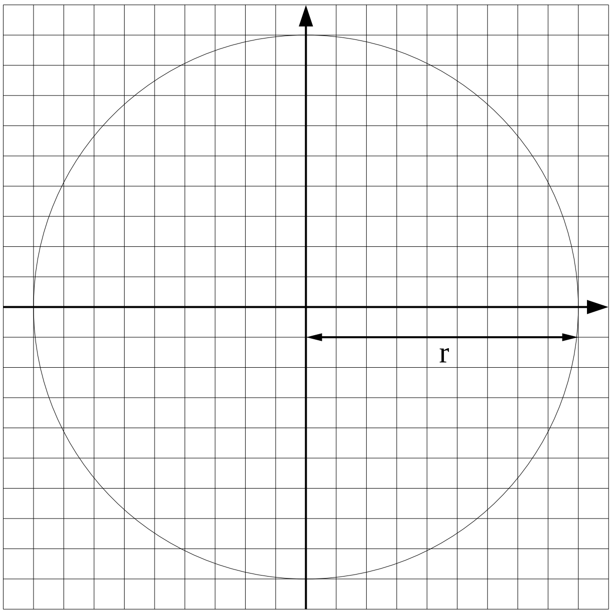
Berechnung von Pi und verwandte Probleme

1. Gitterpunkte im Kreis

1.1. **Näherungsformel.** Wir wollen eine möglichst einfache näherungsweise Formel finden für die Anzahl der Gitterpunkte in einem Kreis um $(0, 0)$ mit Radius $r > 0$.



Sei

$$g(r) := |\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}|$$

diese Anzahl. Betrachten Sie alle Gitterquadrate, deren linke untere Ecke im Kreis liegt, und vergleichen Sie deren Anzahl mit dem Flächeninhalt des Kreises. Welche Näherungsformel

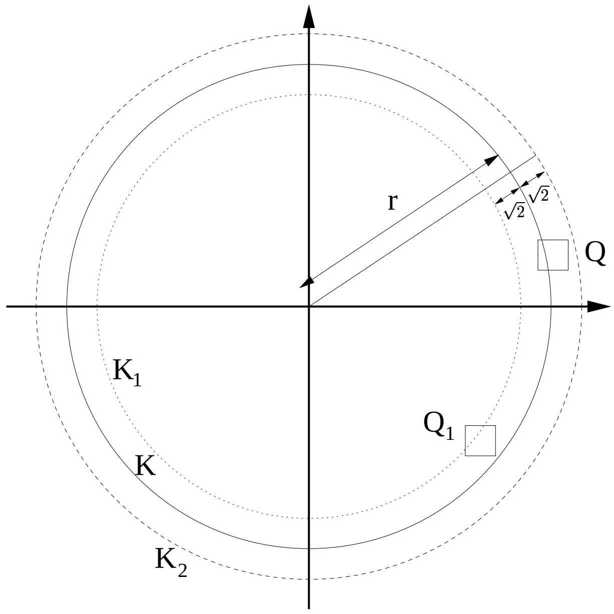
$$g(r) \approx$$

ergibt sich? Welche Näherungsformel für π erhält man daraus?

1.2. **Experiment.** Zeichnen Sie auf Karopapier einen Kreis mit 20 Kästchenbreiten als Radius und bestimmen Sie $g(20)$ durch Zählen. Welche Näherung für π ergibt sich?

1.3. **Genauigkeit.** Wir können nicht mit Bestimmtheit sagen, wie gut unser Näherungswert für π ist. Aber wir können angeben, wie groß der Fehler höchstens ist (*Fehlerabschätzung*).

1.3.1. Betrachten Sie die Kreise K_1, K und K_2 um $(0,0)$ mit den Radien $r - \sqrt{2}$, r und $r + \sqrt{2}$.



Zeigen Sie:

- Jedes Gitterquadrat Q_1, das K_1 schneidet, liegt ganz in K.
- Jedes Gitterquadrat Q, dessen linke untere Ecke in K liegt, liegt ganz in K_2.

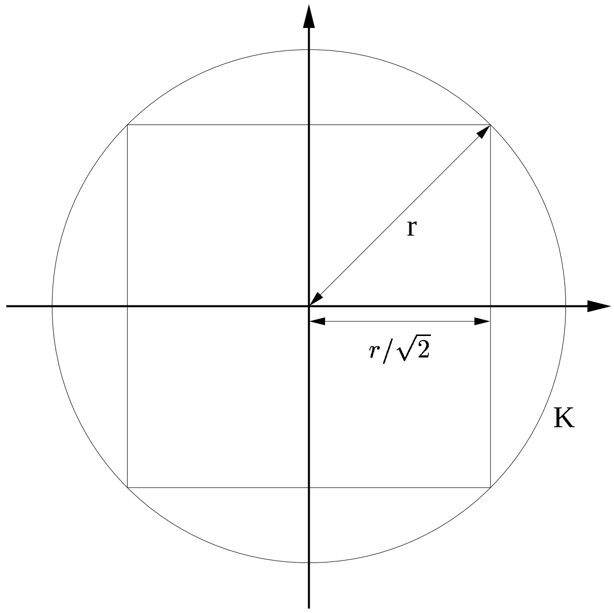
1.3.2. Folgern Sie daraus für die Flächeninhalte der Kreise

$$A(K_1) \leq g(r) \leq A(K_2).$$

1.3.3. Geben Sie Formeln an für $A(K_1)$ und $A(K_2)$. Wie groß kann $|g(r) - \pi r^2|$ höchstens werden? Welche Fehlerabschätzung für die Berechnung von π ergibt sich daraus?

1.3.4. Geben Sie für $r = 20$ eine Abschätzung des Fehlers bei der Berechnung von π an.

1.4. **Exakte Formeln für** $g(r)$**.** Die graphische Bestimmung von $g(r)$ ist für großen Radius r mühsam und fehleranfällig. Ausserdem können wir sie nicht durch einen Computer durchführen lassen. Wir wollen deshalb eine exakte Formel herleiten.



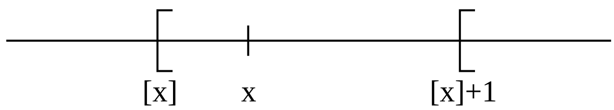
Dazu teilen wir den Kreis K um $(0,0)$ mit Radius $r \in \mathbb{N}$ auf in die Teilmengen

- $A = \{(0,0)\}$,
- $B =$ Schnitt von K mit den Achsen ohne $(0,0)$,
- C_1, C_2, C_3, C_4 = Achsenparallele Quadrate mit einer Ecke bei $(0,0)$ und Kantenlänge $r/\sqrt{2}$,
- $D =$ Rest.

1.4.1. Geben Sie exakte Formeln an für die Anzahl der Gitterpunkte in A, B und den Mengen C_i. Dabei ist die Gauß-Klammer

$$[x] = \text{ größte ganze Zahl } \leq x$$

nützlich:



Es gilt also z.B. $[2.5] = 2$, $[-3] = -3$, $[-0.5] = -1$.

1.4.2. Für die Anzahl g^* der Gitterpunkte in D gibt es keine geschlossene Formel. Aber immerhin gilt

$$g^*/8 = \left[\sqrt{r^2 - a^2}\right] + \left[\sqrt{r^2 - (a+1)^2}\right] + \cdots + \left[\sqrt{r^2 - (r-1)^2}\right] \text{ mit } a = \left[\frac{r}{\sqrt{2}}\right] + 1.$$

Warum?

1.4.3. Berechnen Sie $g(20)$ mit diesen Formeln.

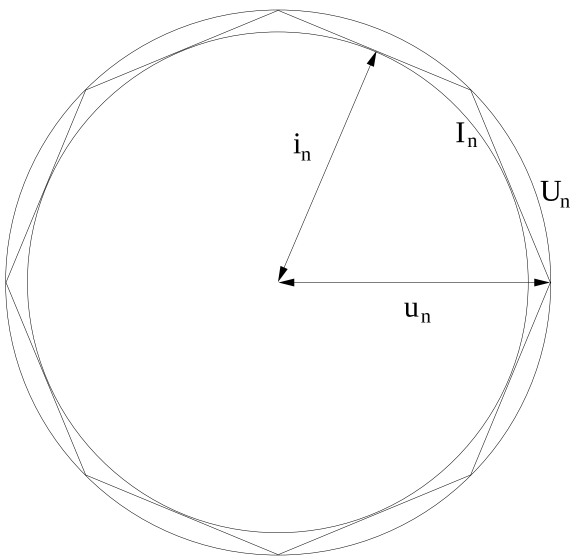
1.5. Das folgende Computerprogramm berechnet die Näherung $g(r)/r^2$ bei Eingabe von $r \in \mathbb{N}$:

```
INPUT r
g = 0
FOR a = int(r/sqrt(2))+1 TO r - 1
  g = g+int(sqrt(r^2-a^2))
NEXT a
g = 1+4*r+4*int(r/sqrt(2))^2+8*g
g = g/r^2
OUTPUT g
```

Programmieren Sie es auf einem Taschenrechner oder Computer und lassen Sie für die Werte $r = 20, 21, 22, \ldots$ die Näherungen an π berechnen. Vergleichen Sie die Werte mit dem exakten Wert von π. Wie groß ist dieser tatsächliche Fehler im Vergleich zu den theoretischen Abschätzungen aus Abschnitt 1.3.3?

2. Approximation durch regelmässige Vielecke

2.1. **Ansatz.** Wir wollen ein Verfahren herleiten, das die geometrische Definition von π verwendet. Dazu betrachten wir ein regelmäßiges 2^n–Eck mit Umfang 2 und Inkreis I_n und Umkreis U_n.

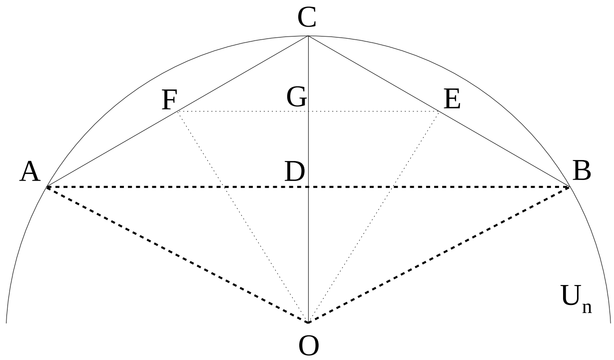


Der Inkreis habe den Radius i_n und der Umkreis den Radius u_n. Wir wollen, ausgehend vom Quadrat, nacheinander die Radien i_2, u_2, i_3, u_3, …aus den jeweils vorhergehenden Werten berechnen (*Rekursionsformeln*). Daraus sollen dann Näherungen für π berechnet werden.

2.2. **Abschätzung.** Schachteln Sie den Umfang des 2^n–Ecks nach oben und unten mit Hilfe von i_n und u_n ein.

2.3. **Startwerte.** Berechnen Sie i_2 und u_2.

2.4. **Hilfsbetrachtung.** In der Figur sei $\triangle AOB$ ein Sektor des 2^n–Ecks.



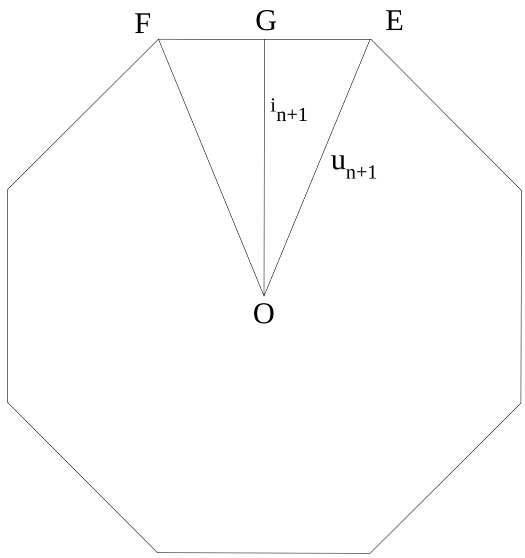
Der Punkt C sei Mittelpunkt des Bogens von U_n zwischen A und B und D, E F seien die Mittelpunkte der Strecken AB, BC und CA.

2.4.1. Berechnen Sie die Länge $\overline{AB}$ der Strecke AB.

2.4.2. Berechnen Sie mit dem Strahlensatz die Länge $\overline{EF}$.

2.4.3. Zeigen Sie $\measuredangle EOF = \frac{1}{2}\measuredangle BOA$.

2.4.4. Begründen Sie mit Hilfe eines Kongruenzsatzes, daß $\triangle OEF$ ein Sektor des 2^{n+1}–Ecks ist.



Also ist

$$\overline{OC} = u_n, \quad \overline{OD} = i_n, \quad \overline{OE} = u_{n+1}, \quad \overline{OG} = i_{n+1}.$$

2.5. **Rekursionsformeln.** Jetzt sollen i_{n+1} und u_{n+1} aus i_n und u_n berechnet werden.

2.5.1. Warum ist G der Mittelpunkt der Strecke CD?

2.5.2. Berechnen Sie damit i_{n+1} aus i_n und u_n.

2.5.3. Warum sind $\triangle OEC$ und $\triangle OEG$ ähnlich?

2.5.4. Berechnen Sie damit u_{n+1} aus i_{n+1} und u_n.

2.6. **Approximation.** Begründen Sie, warum das folgende Computerprogramm bei Eingabe von $N \in \mathbb{N}$ die N–ten Näherungen an π berechnet:

```
INPUT N
i = 1/4
u = sqrt(2)/4
FOR n = 2 TO N - 1
  i = (i+u)/2
  u = sqrt(i*u)
NEXT n
OUTPUT 1/u , 1/i
```

2.7. **Experiment.** Berechnen Sie die 6–te Näherung an π auf dem Taschenrechner. Geben Sie eine Abschätzung des Fehlers an, ohne den Wert von π zu benutzen.

2.8. **Fehlerabschätzung.** Natürlich kann man für jedes n die Werte von $1/u_n$ und $1/i_n$ berechnen und ihre Differenz zur Fehlerabschätzung verwenden. Aber wir würden gerne im Voraus wissen, wie groß n zu wählen ist, um eine geforderte Genauigkeit zu erhalten.

2.8.1. Zeigen Sie mit den Rekursionsformeln, daß

$$u_{n+1}^2 - i_{n+1}^2 = \frac{1}{2} i_{n+1}(u_n - i_n)$$

gilt.

2.8.2. Faktorisieren Sie die linke Seite und schätzen Sie einen Faktor nach unten durch $2i_{n+1}$ ab.

2.8.3. Folgern Sie daraus

$$0 \leq u_{n+1} - i_{n+1} \leq \frac{1}{4}(u_n - i_n).$$

2.8.4. Zeigen Sie

$$0 \leq u_n - i_n \leq \frac{1}{4^{n-2}}(u_2 - i_2).$$

2.8.5. Warum gilt für die Fehlerschranke $\delta_n = 1/i_n - 1/u_n$ die Abschätzung

$$0 \leq \delta_n \leq \frac{1}{4^{n-2}} \frac{u_2 - i_2}{i_2^2} \leq \frac{27}{\cdot 4^n}?$$

2.9. **Experiment.** Wie groß braucht man n höchstens zu wählen, um eine Genauigkeit von 10^{-16} zu erhalten?

3. Internet-Adressen zum Thema π

(1) http://web.mathematik.uni-freiburg.de/mi/zahlen/home/peter/
(2) http://escape.com/~paulg53/math/pi/greg/index.html
(3) http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Pi_chronology.html
(4) http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Pi_through_the_ages.html
(5) http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Squaring_the_circle.html
(6) http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibpi.html